数理解析研究所講究録
465巻 1982年 37-45

Rees algebra の Gorenstein 性について。

名大 理学部　池田 信

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noetherian local rings とする。

$$R(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n \quad , \quad G(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$$

とおき $R(A)$ を A の Rees algebra $G(A)$ を A の associated graded ring という。 $\mathfrak{m} = (a_1, \cdots, a_v)$ とすると，$R(A)$ は一変数多項式環 $A[X]$ の subring $A[a_1X, \cdots, a_vX]$ と同一視することができる。 $\deg X = 1$ とおくことによって $R(A)$ に graded ring の構造が入る。$M = (a_1, \cdots, a_v, a_1X, \cdots, a_vX)R(A)$ とおく。

本稿の目的は $R(A)$ が Gorenstein になるための条件を与えることである。 A が Cohen-Macaulay のときには，後藤氏と下田氏によって得られた次の結果がある。

<u>定理</u>　A を Cohen-Macaulay，$d = \dim A \geq 2$ とすると，$R(A)$ が Gorenstein ring になるための必要十分条件は $G(A)$ が Gorenstein ring であり $a(G(A)) = -2$ となることである，ただし

$$a(G(A)) = \max\{n \mid H^d_M(G(A))_n \neq 0\}。$$

"R(A)がGorensteinならばAもそうであるか?" という問題を考えるのは自然であろう。しかしこれは一般には正しくない。実際，3次元 Buchsbaum, non-Cohen-Macaulay local ring で Rees algebra が Gorenstein になるものがある。したがって上述の定理を一般化する必要がある。本稿の主定理は次のように述べることができる。

<u>定理 1</u>. $d = \dim A \geqq 2$, K_A, $K_{G(A)}$をそれぞれ A, $G(A)$ の canonical module とする。このとき次は同値，

1) $R(A)$ は Gorenstein

2) a) $R(A)$は Cohen-Macaulay,

   b) $K_A \cong A$

   c) $K_{G(A)} \cong G(A)(-2)$.

§1 準備。

以後，簡単のため，k は無限体とする。 まず $R(A)$ が Cohen-Macaulay になるための条件を思い出そう。

<u>Proposition 1</u> $d = \dim A \geqq 1$ とすると次は同値。

1) $R(A)$ は Cohen-Macaulay.

2) a) $a(G(A)) < 0$

   b) $i < d$ に対して

$$H_M^i(G(A))_n = \begin{cases} H_m^i(A) & (n=-1) \\ (0) & (n \neq -1) \end{cases}$$

このとき，A，G(A)はBuchsbaumで$I(A)=I(G)$。

次に，定理1を証明するために必要な事実を述べる。

<u>Lemma 2</u>　$l(H_m^i(A))<\infty$，$i<\dim A$ とする，ここで $l(E)$ はA-module Eの長さを表す。このとき，

$$H_M^{d+1}(R(A))_n = (0),\quad n \geq 0 \text{。}$$

証明は次元に関するinductionで容易にできる。

<u>Lemma 3</u>　$\dim A = d \geqq 2$ とする。$a \in m$ を m のminimal reductionのminimal generatorの一部になるものとする。

$\overline{R} = R(A)/(a, aX)$ とおくと，$R(A)$がGorensteinのとき $H_M^{d-1}(\overline{R}) = (0)$ となる。

（証明）簡単のため，$R=R(A)$とおく。RはGorensteinだからlocal dualityにより，$\mathrm{Ext}^1_{R/aR}(\overline{R}, R/aR)=(0)$ を示せばよい。$m=(a, a_2, \cdots, a_v)$とすると，次のexact sequenceがある。

$$(R/aR)^{v-1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_v \end{bmatrix}} R/aR \xrightarrow{aX} R/aR \to \overline{R} \to 0$$

よって，

$$\mathrm{Ext}^1_{R/aR}(\overline{R}, R/aR) = \frac{(aR : mR)}{(a, aX)R} = \frac{(a, aX)R}{(a, aX)R} = (0) \text{。}$$

Lemma 4　$R(A)$が Cohen-Macaulay, $\mathrm{Hom}_{R(A)}(k, H_M^d(G(A)))_n = 0$　$n \neq -2$ とすると, $\mathrm{Hom}_{R(A)}(k, H_M^{d+1}(R(A)))_n = 0$　$n \neq -1$

(証明)　$R = R(A)$, $G = G(A)$ とおく。

$$0 \to R_+ \to R \to A \to 0 \quad (\text{exact})$$

$$0 \to R_+(1) \to R \to G \to 0 \quad (\text{exact})$$

より

$$0 \to H_m^d(A) \to H_M^{d+1}(R_+) \to H_M^{d+1}(R) \to 0 \quad (\text{exact})$$

$$0 \to H_M^d(G) \to H_M^{d+1}(R_+)(1) \to H_M^{d+1}(R) \to 0 \quad (\text{exact}).$$

Socle をとると,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(k, H_m^d(A)) \to \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R_+)) \to \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R)) \to \mathrm{Ext}_R^1(k, H_m^d(A)) \quad (\text{exact}).$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(k, H_M^d(G)) \to \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R_+))(1) \to \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R)) \quad (\text{exact}).$$

これより, $\mathrm{Ext}_R^1(k, H_m^d(A))_n = 0$, $n \leqq -2$ に注意すると,

$$\mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R_+))_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R))_n, \quad n \leqq -2,$$

$$\mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R_+))_n \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R))_{n-1}, \quad n \leqq -2.$$

したがって, $\mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R))_n = 0$, $n \leqq -2$。結論は Lemma 2より出る。

§2　定理1の証明。

1) ⇒ 2)。次の exact sequence がある。

$$(*)\begin{cases} 0 \to H_M^{d-1}(\bar{R}) \to H_m^d(A) \to H_M^{d+}(R/axR) \to H_M^d(\bar{R}) \to 0 \\ 0 \to H_M^{d-1}(\bar{R}) \to H_M^d(G)(-1) \to H_M^d(R/aR) \to H_M^d(\bar{R}) \to 0, \end{cases}$$

ただし，a は Lemma 3 のようにとる。Lemma 3 より，

$H_M^{d-1}(\bar{R})=0$。 Socle をとることにより，2) の a), c) が出る。

2) ⇒ 1)。(*) より $H_M^{d-1}(\bar{R})=0$ がわかる。 Lemma 2 より，

$H_M^d(\bar{R})_n=0$，$n \geq 0$，c) と Lemma 4 より

$\mathrm{Hom}_R(k, H_M^d(R/axR))_n=0$ $n \neq 0$ がわかる。Socle をとることにより，

$$k \cong \mathrm{Hom}_R(k, H_m^d(A)) \cong \mathrm{Hom}_R(k, H_M^d(R/axR))\text{。}$$

よって，R は Gorenstein。

§3 example。

Example の構成のため，次の結果を用いる。

Proposition 5 (A, m, k) を 3 次元 Noetherian local ring $q=(a_1, a_2, a_3)$ を m の minimal reduction とする。

$I=(a_1,a_2):a_3+(a_2,a_3):a_1+(a_1,a_3):a_2+m^2$ とおく。

このとき次は同値.

1) R(A) は Cohen-Macaulay

2) a) $m^3=qm^2$

b) $\ell(I/\mathfrak{m}^2) = 3(\ell(A/\mathfrak{q}) - e(A)) + 3$，ただし，$e(A)$は$A$のmultiplicity。

さて，Aを3次元local ringで$R(A)$がCohen-Macaulayとする。Aのembedding dimensionが6とする。AがCohen-Macaulayでないとすると，

$$6 \leqq \ell(I/\mathfrak{m}^2) \leqq \ell(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 6$$

よって，$\mathfrak{m} = I$。Prop 1より，AがBuchsbaumであることに注意すると，$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$。したがって$A$はmaximal embedding dimensionのBuchsbaum ring。$I(A) = \ell(A/\mathfrak{q}) - e(A) = 1$だから，$\mathrm{emb}(A) = e(A) + \dim A + I(A) - 1$より，

$e(A) = 3$。

<u>Example</u>　kを$ch(k) = 2$の体，$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$を不定元とする。

$$A = k[\![X_1, X_2, X_3, Y_1, \cdots, Y_4]\!]/\mathfrak{a} = k[\![x_1, x_2, x_3, y_1, \cdots, y_4]\!]$$

$\mathfrak{a} = (X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3,\ Y_1^2,\ Y_2^2,\ Y_3^2,\ Y_4^2,\ Y_1Y_4,\ Y_2Y_4,$
$Y_3Y_4,\ Y_1Y_2 - X_3Y_4,\ Y_2Y_3 - X_1Y_4,\ Y_1Y_3 - X_2Y_4)$とおくと，$A$はnon-Cohen-Macaulay Buchsbaum ringで$R(A)$はGorensteinである。

(証明) 次のexact sequenceを考えよう。

(☆) $0 \to A/(0:y_4) \to A \to A/y_4A \to 0$

$A/y_4A \cong k[\![X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]\!]/(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3, (Y_1, Y_2, Y_3)^2)$

Prop5より A/y_4A の Rees algebra $R(A/y_4A)$ は Cohen-Macaulay である。上の注意より $e(A/y_4A)=3$ 。一方，$ch(k)=2$ であることに注意すると，

$$(0:y_4)=(y_1,\cdots,y_4)$$

よって，$A/(0:y_4)\cong k[\![X_1,X_2,X_3]\!]$ とくに $e(A/(0:y_4))=1$。(☆) より $e(A)=4$。

$q=(x_1,x_2,x_3)$ とおくと $l(A/q)=5$。簡単な計算により $l(I/m^2)=6$。Proposition 5より，$R(A)$は Cohen-Macaulay。 $\mathfrak{a}$は homogeneous polynomialで生成されているので $K_{G(A)}\cong G(A)(-2)$ を示せば十分。$\mathfrak{b}$を$\mathfrak{a}$の生成元で生成された $k[X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4]$ の ideal とすると，

$$G(A)\cong k[X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4]/\mathfrak{b}=k[x_1,\cdots,y_4]。$$

$S=k[x_1,x_2,x_3]$ とおくと，$G(A)$は有限生成 S-module 。$G(A)$の canonical moduleを計算しよう。Sは多項式環と同型で$G(A)$はS-module として $1,y_1,\cdots,y_4$で生成されていることから次の exact sequenceを得る。

$$0\to S(-2)\xrightarrow[{[0\ x_1\ x_2\ x_3\ 0]}]{} S\oplus S(-1)^4\xrightarrow[\varphi]{} G(A)\to 0,$$

ここで，$S\oplus S(-1)^4$の base $e_0,\cdots,e_4$ は，$\varphi(e_0)=1$, $\deg e_0=0$,

$\varphi(e_i) = y_i$, $\deg e_i = 1$ $(1 \leqq i \leqq 4)$となるようにとる。

$$K_{G(A)} = \mathrm{Hom}_S(G(A), S(-3))$$
$$= \ker(\mathrm{Hom}_S(S \oplus S(-1)^4, S(-3)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S(-2), S(-3)))$$

だから，$K_{G(A)}$はS-moduleとしてe_0^*, $x_3 e_2^* - x_2 e_3^*$, $-x_3 e_1^* + x_1 e_3^*$, $x_2 e_1^* - x_1 e_2^*$, e_4^*で生成される，ただし，e_i^*はe_iのdual baseで$\deg e_0^* = 3$, $\deg e_i^* = 2$ $(1 \leqq i \leqq 4)$。 $G(A)$は$K_{G(A)}$に，

$(g \cdot f)(h) = f(gh)$ $\quad f \in \mathrm{Hom}_S(G(A), S(-3))$, $g, h \in G(A)$ と作用している。$ch(k) = 2$であることに注意すると，

$$y_4 \cdot e_4^* = e_0^*$$
$$y_1 \cdot e_4^* = x_3 e_2^* - x_2 e_3^*$$
$$y_2 \cdot e_4^* = -x_3 e_1^* + x_1 e_3^*$$
$$y_3 \cdot e_4^* = x_2 e_1^* - x_1 e_2^*$$

となることがわかる，これは，$K_{G(A)} \cong G(A)(-2)$を示している。

<u>Remark</u>。 $\dim A = 3$ のとき，$R(A)$がGorensteinならば

$$\dim_{A/m} m/m^2 = 3h + 4 \quad , \quad h = \ell(H_m^2(A))$$

となることが知られている。この意味で，上述のexampleは最も簡単なものである。

Reference

[1] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras of Cohen-

Macaulay rings, preprint.

[2] S. Gato and K. Watanabe, On graded rings. I. J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 179–213.

[3] S. Ikeda, The Cohen-Macanlayness of Rees algebras of local rings, to appear in Nagoya Math. J. 51 (1973), 25–43.